1)

Sea $\mathbb{S}_a \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$ el subespacio definido por $\mathbb{S}_a = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} a-3 & -2 \\ -2 & a-5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a-7 & a-5 \\ 0 & a-7 \end{bmatrix}\right\}$, con $a \in \mathbb{R}$.

Seleccione una:

- a. $\dim(\mathbb{S}_a) = 3$ si y solamente si $a \notin \{3, 5\}$.
- b. $\dim(\mathbb{S}_a) = 3$ si y solamente si $a \notin \{5, 7\}$.
- c. $\dim(\mathbb{S}_a) = 3$ si y solamente si $a \notin \{2, 5\}$.
- d. $\dim(\mathbb{S}_a) = 3$ si y solamente si $a \notin \{2, 7\}$.

Para este problema alcanza con hallar $a \in \mathbb{R}$:

$\Big\{\underbrace{\begin{pmatrix} a-3 & -2 \\ -2 & a-5 \end{pmatrix}}_{M_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{M_2} \underbrace{\begin{pmatrix} a-7 & a-5 \\ 0 & a-7 \end{pmatrix}}_{M_3}\Big\}$ es un conjunto l.i. en $\mathbb{R}^{2\times 2}$ $\Leftrightarrow \{[M_1]^E, [M_2]^E, [M_3]^E\}$ es l.i. en $\mathbb{R}^4$

con $E = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

Así $\left\{\begin{pmatrix} a-3 \\ -2 \\ -2 \\ a-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-7 \\ a-5 \\ 0 \\ a-7 \end{pmatrix}\right\}$ es l.i. en $\mathbb{R}^4 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a-3 & 0 & a-7 \\ -2 & 1 & a-5 \\ -2 & 1 & 0 \\ a-5 & 1 & a-7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

admite sólo la solución trivial $(\alpha = \beta = \lambda = 0)$ →

Escalonando adecuadamente la matriz de los coeficientes:

$$\begin{pmatrix} a-3 & 0 & a-7 \\ -2 & 1 & a-5 \\ -2 & 1 & 0 \\ a-5 & 1 & a-7 \end{pmatrix}$$ se llega a que $a \notin \{3, 5\}$

2)

Sean $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y $B \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ dos matrices tales que $AB = \begin{bmatrix} 10 & -10 & -5 & 5 \\ 11 & -11 & -4 & 7 \\ 11 & -11 & -5 & 6 \end{bmatrix}$,

donde $\boxed{\text{rango}(A) = 3,}$ y B satisface que

$B\,[1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1]^T = [0 \;\; 3 \;\; 1]^T$,

$B\,[1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0]^T = [5 \;\; 7 \;\; 6]^T$.

El conjunto solución de la ecuación $Bx = [5 \;\; 1 \;\; 4]^T$ es ...

Seleccione una:

a. $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

b. $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

c. $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

d. $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

Observaciones:

a) $B\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad B\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\qquad B\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{x_p} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $rg(AB) = 2 \Rightarrow \dim Nul(AB) = 2$

c) $Nul(B) \subset Nul(AB)$ siempre que el producto sea posible

d) En este caso se cumple además $Nul(AB) \subset Nul(B)$ ya que

$x \in Nul(AB) \Rightarrow ABX = 0$

como $\boxed{\exists A^{-1}}$ $A^{-1}(ABX) = A^{-1}\cdot 0$

$\Rightarrow BX = 0 \Rightarrow X \in Nul(B)$

$\therefore Nul(B) = Nul(AB)$

e) El conjunto solución de $BX = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ se encuentra en los $x = \underline{x_p} + x_h$ $\quad x_h \in Nul(B)$ es $Nul(AB)$ solo resta calcular entonces para llegar a la Rta (d) //

3) Sean $\mathbb{U}$ y $\mathbb{S}$ los subespacios de $\mathbb{R}_3[x]$ definidos por

$\mathbb{U} = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p'(2) = 0\}$ y $\mathbb{S} = \text{gen}\{1 - 4x + x^2, 2 - 12x + x^3\}$.

Un subespacio $\mathbb{T}$ de $\mathbb{R}_3[x]$ tal que $\mathbb{S} \oplus \mathbb{T} = \mathbb{U}$ es ...

Seleccione una:

- a. $\mathbb{T} = \text{gen}\{5 + 3x^2 + x^3\}$.
- b. $\mathbb{T} = \text{gen}\{1 + 3x^2 - x^3\}$.
- c. $\mathbb{T} = \text{gen}\{-3x^2 + x^3\}$.
- d. $\mathbb{T} = \text{gen}\{3x^2 + x^3\}$.

Obs :

a) $\dim(U) = 3$

b) $\dim(S) = 2$

c) $S \subset U$ $\wedge$ $T \subset U$ (caso contrario $\nexists T$)

d) De lo anterior se deduce que $\dim(T) = 1$

$T = \text{gen}\{v\}$ $v \neq 0$ $\Rightarrow$ debe ocurrir que $\{1 - 4x + x^2, 2 - 12x + x^3, v\}$ sea un conjunto li y esto ocurre en el caso (c)

Obs : Hay en este casos dos opciones que pueden descartarse porque No se cumple que $T \subset U$ (verificar)

4)

Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}^3)$ y sea $[T]_B^C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ la matriz de T con respecto a las bases

$B = \left\{\frac{1}{2}(x-1)(x-2), -x(x-2), \frac{1}{2}x(x-1)\right\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ y $C = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Si $\mathbb{S} = \text{gen}\{1-x, 1+x\}$, entonces ...

Seleccione una:

- a. $T(\mathbb{S}) = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 11 \\ 10 \end{bmatrix} \right\}$.
- b. $T(\mathbb{S}) = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 14 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.
- c. $T(\mathbb{S}) = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 14 \end{bmatrix} \right\}$.
- d. $T(\mathbb{S}) = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 11 \\ 18 \\ 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 15 \\ 23 \\ 13 \end{bmatrix} \right\}$.

Obs

a) $[T]_B^C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ tiene por columnas a las coordenadas de los transformados de los vectores de la base B en base C

Por ej:

$$T\left(\frac{1}{2}(x-1)(x-2)\right) = \boxed{0}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \boxed{1}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \boxed{1}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) Para esa base B particular se cumple que $[p]^B = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{pmatrix}$ (ver ej de la práctica) para cualquier polinomio

c) se puede expresar cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ en la base C

$$\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]^C = \left(-x+y-z \quad \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z \quad \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{4}{3}z\right)^T$$

d) $T(S) = \text{gen}\{T(1-x), T(1+x)\}$ donde $[(1-x)]^B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $[(1+x)]^B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$

Usando $[T]_B^C \, [p]^B = [T(p)]^C$

resulta que $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = [T(1-x)]^C$

$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix} = [T(1+x)]^C$

$\therefore \; T(1-x) = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$

$T(1+x) = (-8)\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + (12)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 41 \\ 23 \end{pmatrix}$

Rta (d) Obs: $\begin{pmatrix} 11 \\ 18 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 11 \\ 18 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 41 \\ 23 \end{pmatrix}$

5) Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ la proyección de $\mathbb{R}_2[x]$ sobre el subespacio $\operatorname{gen}\{1-2x, 1+x^2\}$ en la dirección del subespacio $\operatorname{gen}\{x-x^2\}$. La matriz de T con respecto a la base canónica $\{1, x, x^2\}$ es ...

Seleccione una:

- a. $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -4 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.
- b. $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
- c. $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.
- d. $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Obs: Recordar que si llamamos $S_1 = \operatorname{gen}\{1-2x, 1+x^2\}$ y $S_2 = \operatorname{gen}\{x-x^2\}$ la proyección de $\mathbb{R}_2[x]$ sobre S_1 en la dirección de S_2

se define como $T(v) = v$ $v \in S_1$ $\wedge$ $T(v) = 0$ si $v \in S_2$ (*)

Además si tomamos como base de $\mathbb{R}_2[x]$ una $B = \{p_1, p_2, p_3\}$ con

$p_1 \in S_1$, $p_2 \in S_1$, $p_3 \in S_2$ $\Rightarrow$

$\longrightarrow$

$$\Rightarrow \quad [T]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore T \text{ no es inversible}$$ (Hay dos respuestas que se pueden descartar)

En este caso $B = \{1-2x, 1+x^2, x-x^2\}$ y usando matrices de cambio de base

es $$[T]_E^E = C_B^E \ [T]_B^B \cdot C_E^B$$

con C_B^E la matriz de cambio de base de B a E (canónica de $\mathbb{R}_2[x]$)

$$C_B^E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } \quad C_E^B = \left(C_B^E\right)^{-1}$$

Para llegar a la respuesta (b)

Obs: También se podrían tomar las matrices dadas y "chequear" en cuál de ellas se cumple la definición (*)

6)

Sea $y \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ tal que $y'' - y' - 6y = 0$.

Seleccione una:

- a. $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0 \iff \begin{bmatrix} y(0) & y'(0) \end{bmatrix}^T \in \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}^T\right\}$.
- b. $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0 \iff \begin{bmatrix} y(0) & y'(0) \end{bmatrix}^T \in \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 & -5 \end{bmatrix}^T\right\}$.
- c. $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0 \iff \begin{bmatrix} y(0) & y'(0) \end{bmatrix}^T \in \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 & -7 \end{bmatrix}^T\right\}$.
- d. $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0 \iff \begin{bmatrix} y(0) & y'(0) \end{bmatrix}^T \in \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix}^T\right\}$.

Obs:

$y'' - y' - 6y = 0$

$\Updownarrow$

$(\underbrace{D^2 - D - 6I}_{})(y) = 0$

$(D - 3I)(D + 2I)(y) = 0$

$\Downarrow$

$Nu\,(D^2 - D - 6I) = \operatorname{gen}\{e^{3x}, e^{-2x}\}$

$\therefore \quad y_G(x) = Ae^{3x} + Be^{-2x} \qquad y(0) = A + B$

$y'(x) = 3Ae^{3x} - 2Be^{-2x} \qquad y'(0) = 3A - 2B$

$\lim\limits_{x \to \infty} y(x) = 0 \Rightarrow A = 0 \quad \left(\lim\limits_{x \to \infty} e^{3x} = \infty\right) \wedge (y(0) \;\; y'(0))^T = (B \;\; -2B)^T = B(1 \;\; -2)^T \;\; \forall B \in \mathbb{R}$

Rta (a)

7) Sea $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{R}$ -espacio euclídeo de dimensión 3, y sea $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base ortonormal de $\mathbb{V}$.

La distancia del vector $2v_1 + 5v_2$ al subespacio $\text{gen}\{3v_1 + 2v_3, 3v_2 + v_3\}$ es ...

Seleccione una:

- a. $\frac{11\sqrt{14}}{14}$.
- b. $\frac{\sqrt{14}}{14}$.
- c. $\frac{9\sqrt{14}}{14}$.
- d. $\frac{13\sqrt{14}}{14}$.

Obs: a) $B = \{v_1, v_2\ v_3\}$ es una BON de $\mathbb{V} \Rightarrow G^B = Id \wedge \langle v, w\rangle = ([w]^B)^T [v]_B$

b) $d(2v_1+5v_2, S) = \| 2v_1 + 5v_2 - P_S(2v_1+5v_2)\| = \| P_{S^\perp}(2v_1+5v_2)\|$

c) $\dim(S) = 2$, $S \oplus S^\perp = \mathbb{V}$ $\therefore$ $\dim(S^\perp) = 1$

d) Para buscar $S^\perp$: $u \in S^\perp \Leftrightarrow [u]^B \perp \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge [u]^B \perp \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore$ $S^\perp = \text{gen}\{2v_1 + v_2 - 3v_3\}$

e) $P_{S^\perp}(2v_1+5v_2) = \dfrac{\langle 2v_1+5v_2\ ,\ 2v_1+v_2-3v_3\rangle}{\|2v_1+v_2-3v_3\|^2}(2v_1+v_2-3v_3) = \frac{9}{14}(2v_1+v_2-3v_3)$ $\longrightarrow$

y $\quad \| P_{S^\perp}(2v_1 + 5v_2) \|^2 = \left\langle \frac{9}{14}(2v_1 + v_2 - 3v_3), \frac{9}{14}(2v_1 + v_2 - 3v_3) \right\rangle$

$$= \left(\frac{9}{14}\right)^2 \| 2v_1 + v_2 - 3v_3 \|^2 = \left(\frac{9}{14}\right)^2 \cdot 14$$

y $\quad \| P_{S^\perp}(2v_1 + 5v_2) \| = \frac{9}{14} \cdot \sqrt{14}$ $\qquad$ ετα (c)

8)

De acuerdo con la técnica de mínimos cuadrados, la recta que mejor ajusta los siguientes datos

x	-1	0	1	2	3
y	1	3	7	10	13

es ...

Seleccione una:

- a. $y = \frac{1}{10}(41 + 33x)$.
- b. $y = \frac{1}{10}(42 + 30x)$.
- c. $y = \frac{1}{10}(37 + 31x)$.
- d. $y = \frac{1}{10}(41 + 29x)$.

Obs

$y = mx + p$ recta de ajuste

$$\begin{cases} 1 = -m + p \\ 3 = p \\ 7 = m + p \\ 10 = 2m + p \\ 13 = 3m + p \end{cases}$$

Este sistema es incompatible

con $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix}$

La solución por CM que mejor ajusta a los datos sale de

$$A^T A \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} = A^T b \Rightarrow \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 \\ 34 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} m = \frac{31}{10} \\ b = \frac{37}{10} \end{matrix}$$

Rta (c)

//

9) En $\mathbb{R}^3$ con el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definido por

$$\langle x, y \rangle = y^T \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x \, ,$$

se considera la funcional lineal $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(x) = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 .$$

El único vector $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $\phi(x) = \langle x, v \rangle$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$ es ...

Seleccione una:

- a. $v = [-1 \quad 5 \quad -2]^T$.
- b. $v = [-4 \quad 3 \quad 4]^T$.
- c. $v = [-3 \quad 5 \quad 1]^T$.
- d. $v = [1 \quad 2 \quad -1]^T$.

Obs: Llamando $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ escribimos

$$\langle x, v \rangle = (a \; b \; c) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \phi(x) = \langle x, v \rangle \;\; \forall x \in \mathbb{R}^3$ lleva al sistema (*)

$$(*) \quad (3x_1 + 2x_2 + x_3)a + (2x_1 + 2x_2 + x_3)b + (x_1 + x_2 + x_3)c = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3$$

$$\Rightarrow (3a + 2b + c)x_1 + (2a + 2b + c)x_2 + (a + b + c)x_3 = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a + 2b + c = 2 \\ 2a + 2b + c = 5 \\ a + b + c = 3 \end{cases} \Rightarrow v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \to \text{Rta (c)}$$